



### Exercice 1

Un bien est produit à l'aide de deux facteurs de production : le capital et le travail. On suppose que l'entreprise qui fabrique le bien n'a pas la possibilité de changer la valeur de son stock de capital. La production varie alors en fonction du nombre d'unités de travail (heure de travail ouvrier) comme suit :

Unités de travail (T)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'unités produites (X)	0	64	214	432	640	800	864	864	784

1. Calculer et représenter, sur le même graphique, la production de toutes les heures de travail, la productivité horaire du travail et la productivité de chaque heure de travail.
2. Après avoir cité la loi des rendements marginaux décroissants, déterminer la valeur du seuil des rendements décroissants.
3. Que signifie l'existence d'une productivité marginale positive, négative ou nulle ?
4. Délimiter sur le graphique les zones de production. Dans quelle zone le producteur a-t-il intérêt à produire ? Expliquer.

### Exercice 2

La fonction de production d'une entreprise est de la forme :  $P=f(K,T) = 10.K.T$  ; où P désigne la production totale, K le capital et T le travail. Les prix des facteurs K et T sont respectivement de 2 dh et 4 dh. Le prix de vente de l'output sur le marché est de 8 dh l'unité.

1. Pour une dimension 1, l'entreprise dispose d'un budget de  $CT_1 = 40$  dh, calculer le profit total de l'entreprise selon la méthode marginale.
2. Pour une dimension 2, l'entreprise augmente son budget de 400%, les prix des facteurs et celui de l'output restant constants. Calculer le nouvel output selon la méthode du degré d'homogénéité et le nouveau profit selon la méthode comptable.
3. Après avoir augmenté sa dimension, l'entreprise est-elle devenue plus compétitive ? Justifier votre réponse en termes de coûts et de rendements.
4. Le sentier d'expansion est-il une droite ou une courbe ? Déterminer son équation.
5. Quelle est la limite d'utilisation des facteurs de production ?

### Exercice 3

Une branche industrielle est composée de 1000 entreprises. Celles-ci produisent dans des conditions techniques identiques et opèrent dans un marché de concurrence parfaite.

Les conditions de production de l'entreprise type sont résumées par sa fonction de coût total :  $CT=f(x)= 10.x^2 + 10.x + 360$ , x étant la quantité produite.

1. Etablir les équations de CVP, CVNP, CF, CTM, CVM, CFM, et Cm.
2. Déterminer la fonction d'offre de l'entreprise type, son seuil de fermeture et son seuil de rentabilité.
3. Déterminer la fonction d'offre au marché.
4. Si le prix du marché est de 200 dh l'unité, calculer l'élasticité de l'offre globale et calculer le profit de l'entreprise type.



## Exercice 1

Un bien est produit à l'aide de deux facteurs de production, le travail et le capital. On précise que l'entreprise qui fabrique le bien n'a pas la possibilité de changer la valeur de son stock de capital. La production varie alors en fonction du nombre d'unités de travail (heure de travail) comme suit :

Unités de travail (T)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'unités produites (Q)	0	64	214	432	640	800	864	864	784

1. Calculer et représenter, sur le même graphique, la production de toutes les heures de travail, la productivité horaire du travail et la productivité de chaque heure de travail.
2. Après avoir cité la loi des rendements marginaux décroissants, déterminer la valeur du seuil des rendements décroissants.
3. Que signifie l'existence d'une productivité marginale positive, négative ou nulle ?
4. Délimiter sur le graphique les zones de production. Dans quelle zone le producteur a-t-il intérêt à produire ? Expliquer.

## 1° Calcul et représentation de PT, PM et Pm :

## Définitions :

La PT du travail se définit comme la  $P^0$  résultant de l'utilisation d'un certain nombre de facteurs travail avec une quantité fixée du facteur capital.

La PM du travail se définit comme la quantité produite par unité du facteur travail ; soit  $PM = Q = f(K, T)$ .

La Pm du travail est la  $q^e$  supplémentaire résultant de l'augmentation d'une unité du facteur T utilisé ; c'est l'accroissement de la  $q^e$  produite induite par la variation unitaire de T.

$$P_m = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{Q_n - Q_{n-1}}{T_n - T_{n-1}}$$

A partir de ces définitions, nous allons calculer PT et Pm

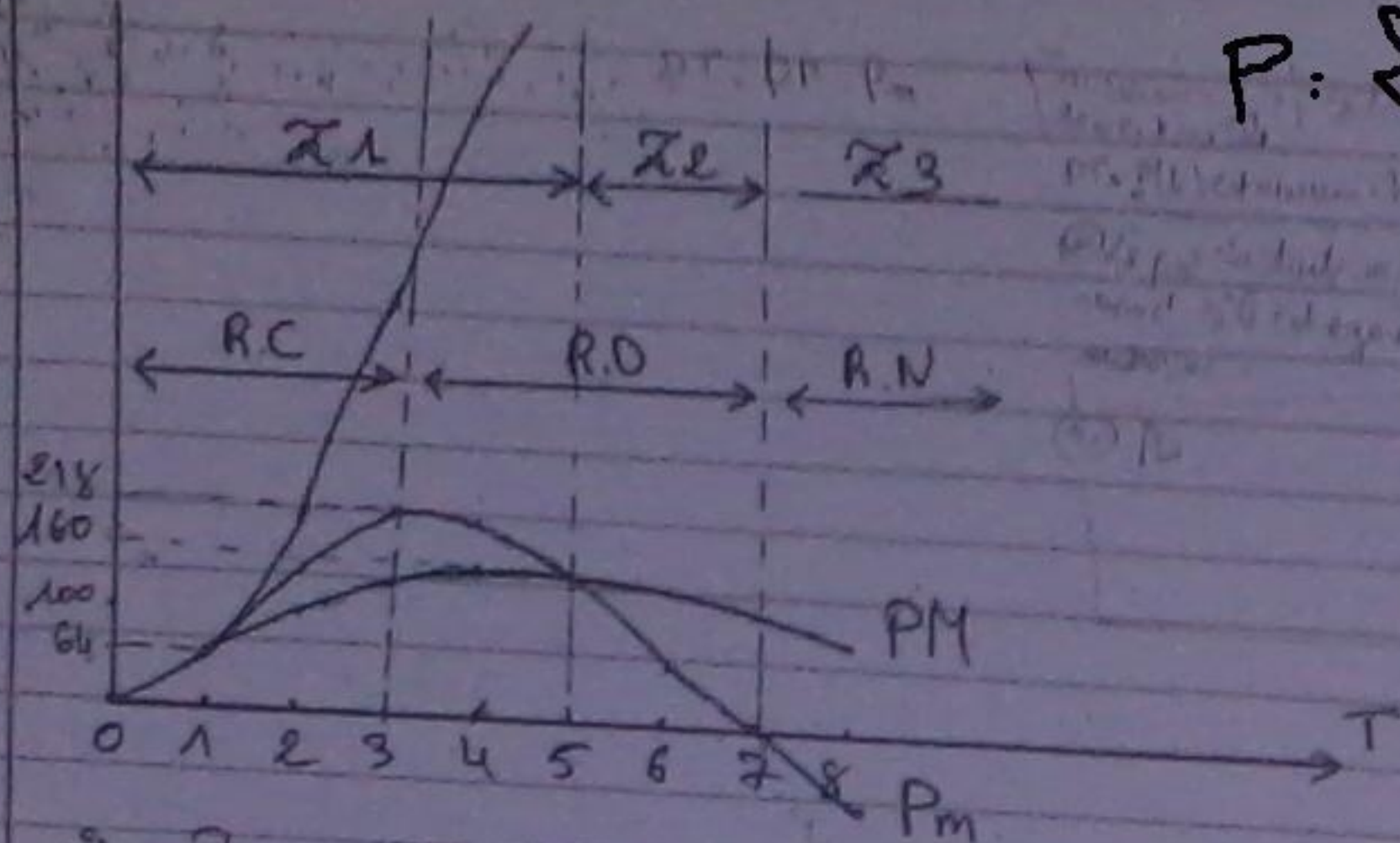
T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Q = PT$	0	64	214	432	640	800	864	864	784
$PM = \frac{Q}{T}$	0	64	107	144	160	160	144	123,43	98
$P_m = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$	0	64	150	218	208	160	64	0	-80

PT = Production de toutes les heures de travail,  
PM = Productivité horaire du travail,

Pm = Productivité marginale du travail.



P: 2



2) Roi des rendements marginaux décroissants:  
" Si l'on accroît la quantité d'un facteur de Production en combinaison avec d'autres facteurs maintenus constants, il existe un point au-delà duquel la PT va croître à un rythme sans cesse décroissant".

Le seuil des rendements décroissants correspond au point d'inflexion de la courbe de la PT, autrement dit il correspond à la valeur de T où la PM est maximale. Dans notre cas, la valeur de seuil des rendements décroissants correspond à  $T = 3$  (non  $P_m = 218$ ).

3) - L'existence d'une  $P_m$  positive signifie que la PT augmente du fait de l'utilisation d'une unité supplémentaire du facteur T.  
- L'existence d'une  $P_m$  négative signifie que l'utilisation d'une unité supplémentaire de T entraîne une baisse de la PT.  
- L'existence d'une  $P_m$  nulle signifie que l'utilisation d'une unité supplémentaire de T laisse inchangée la PT.

4) La nature des rendements est traduite par l'évolution de la  $P_m = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ .

- Si  $P_m$  est croissante ( $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$  augmente), la PT croît plus que proportionnellement à la q'té du facteur T, la PT croît à un rythme qui s'accroît. Dans cette phase les rendements sont croissants (de  $T=0$  à  $T=3$ ).

En première croissante (de 1 à 3 et 1 à 7).  
- si  $\frac{\Delta Q}{\Delta T} = 0$  ( $P_m = 0$ ): la PT reste inchangée car elle atteint  $\Delta T$  un maximum. ( $T = 3$ )  
- si  $\frac{\Delta Q}{\Delta T} < 0$  ( $P_m < 0$ ): la PT décroît (de 4 à 8).

On peut résumer la liaison entre  $(PT)$  et  $(P_m)$  dans le Tableau suivant

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_m = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$		Positive	max	Positive	nulle	négative			
		$> 0$		$> 0$		$< 0$			
Sens de $\Delta^2$ de $P_m$		croissance		max		décroissance			
Sens de $\Delta^2$ de PT		croissance plus que proportionnelle	croissance moins que proportionnelle	max		décroissance			

b) Les zones de Production:

- $Z_1$ : située entre l'origine et le maximum de la PM (point d'égalité entre la PT et  $P_m$ )
- $Z_2$ : située entre le maximum de la PM et le maximum de la PT ( $P_m = 0$ ).
- $Z_3$ : située au-delà du maximum de PT ( $P_m < 0$ ).

Le Producteur a intérêt de produire dans la zone 2, c'est la phase de la croissance décroissante de la PT, et décroissance de la PM et  $P_m$ , la production de  $P_m$  est combinée de façon efficiente où le producteur peut maximiser son profit.

### Exercice 2

La fonction de production d'une entreprise est de la forme:  $Q = 100K^{0.5}L^{0.5}$  où  $Q$  désigne la production totale,  $K$  le capital et  $L$  le travail. Les prix des facteurs  $K$  et  $L$  sont respectivement de 2 dh et 4 dh. Le prix de vente de l'output sur le marché est de 8 dh l'unité.

1. Pour une dimension 1, l'entreprise dispose d'un budget de 400 dh, calculer la production totale de l'entreprise selon la méthode marginale.
2. Pour une dimension 2, l'entreprise augmente son budget de 400 dh, les prix des facteurs et celui de l'output restent constants. Calculer la variation du profit selon la méthode du degré d'homogénéité et la nouvelle production selon la méthode marginale.
3. Après avoir augmenté sa dimension, l'entreprise est-elle devenue plus compétitive? Justifier votre réponse en termes de coûts et de rendements.
4. La production d'expansion est-elle croissante ou décroissante? Déterminer son élasticité.
5. Quelle est la limite d'utilisation des facteurs de production?

P: 3



P:4

1) Dimension I : Profil selon la méthode marginale.  
2) Combinaison optimale et production maximale :

$$\begin{cases} - \text{Max } P = 10 \cdot KT \\ \text{sachant } CT_1 = 40 = 4T + 2K \end{cases}$$

À l'équilibre :

$$TMST_{1K} : \frac{P_{MT}}{P_{MK}} = \frac{10K}{10T} = \frac{P_T}{P_K} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{K}{T} = 2 \Rightarrow K = 2T$$

$$CT_1 = 40 = 4T + 2K \Rightarrow 40 = 4T + 2(2T) = 8T$$

$$\Rightarrow T = \frac{40}{8} = 5 \text{ et } K = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\text{Donc } P = 10 \cdot KT = 10 \cdot (10) \cdot (5) = 500$$

3) Profil selon la méthode marginale : Prix devient

$$\begin{aligned} \text{Profit total} &= \left[ \frac{P_{MT}}{2+1} \cdot P_M - C_{MT} \right] \cdot T + \left[ \left( \frac{P_{MK}}{2+1} \cdot P_M - C_{MK} \right) \cdot K \right] \\ &= \left[ \left( \frac{10 \cdot 10}{3} \cdot 8 - 4 \right) \cdot 5 \right] + \left[ \left( \frac{10 \cdot 10}{3} \cdot 8 - 2 \right) \cdot 10 \right] \end{aligned}$$

$$= \left[ \left( \frac{10 \cdot 10}{3} \cdot 8 - 4 \right) \cdot 5 \right] + \left[ \left( \frac{10 \cdot 10}{3} \cdot 8 - 2 \right) \cdot 10 \right]$$

$$= 2980 + 2980 = 5960$$

ou via la dérivée :

$$\pi(T, K) = RT - CT = (20) - CT = (8 \cdot 500) - 40 = 4000 - 40 = 3960$$

2) Dimension II : Nouveau output et nouveau profit.

$$CT_2 = 40 + \left( 40 \cdot \frac{400}{100} \right) = 40 + (40 \cdot 4)$$

$$CT_2 = 40 + (40 \cdot 4) = 40 \cdot 5 = 200$$

Homogénéité de la fonction de  $P^2$

$$f(\lambda T, \lambda K) = 10(\lambda T)(\lambda K) = \lambda^2 \cdot 10 \cdot KT = \lambda^2 f(T, K)$$

P:5

$$CT_2 = 5 \cdot CT_1 = (200 \cdot 5) = 1000$$

$$T_2 = 5 \cdot T_1 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$K_2 = 5 \cdot K_1 = 5 \cdot 10 = 50$$

$$P_2 = 5 \cdot P_1 = 25 \cdot 500 = 12500$$

Profit total par la méthode Comptable :

$$\pi(T_2, K_2) = P(T_2, K_2) - CT_2$$

$$= (8 \cdot 12500) - 1000 = 100000 - 1000 = 99800$$

$$\pi(T_2, K_2) = 99800$$

3) Comparaison de l'entreprise :  
L'entreprise est devenue plus compétitive puisque son coût moyen par unité produite (CM) a diminué.

$$CM_1 = \frac{CT_1}{P_1} = \frac{40}{500} = 0,08$$

$$CM_2 = \frac{CT_2}{P_2} = \frac{200}{12500} = 0,016$$

La diminution du coût moyen s'explique par les rendements d'échelle croissants provoqués par l'augmentation de la dimension. Les rendements sont croissants parce que la fonction de  $P^2$  est homogène de degré 2. La croissance des rendements entraîne la décroissance du coût, comme le montre la relation inversement proportionnelle entre le coût moyen de longue période et les RM des facteurs.

$$CM_1 = \frac{P_T}{P_{MT}} + \frac{P_K}{P_{MK}} = \frac{4}{500} + \frac{2}{500}$$

$$CM_1 = \frac{4}{500} + \frac{2}{500} = 0,004 + 0,004 = 0,008$$

$$CM_2 = \frac{4}{12500} + \frac{2}{12500} = \frac{4}{500} + \frac{2}{2500} = 0,008 + 0,008 = 0,016$$

P:5



Pour T :  $\frac{\Delta PM_T}{PM_T} = \frac{400 - 100}{100} = \frac{300}{100} = 300\% \Rightarrow PM_2 = 5 \cdot PM_1$   
 $300 = 5 \cdot 100$

Pour K :  $\frac{\Delta PM_K}{PM_K} = \frac{250 - 50}{50} = \frac{200}{50} = 400\% \Rightarrow PM_2 = 5 \cdot PM_1$   
 $250 = 5 \cdot 50$

variation du CM :  $\frac{\Delta CM}{CM} = \frac{0,016 - 0,08}{0,08} = -80\%$

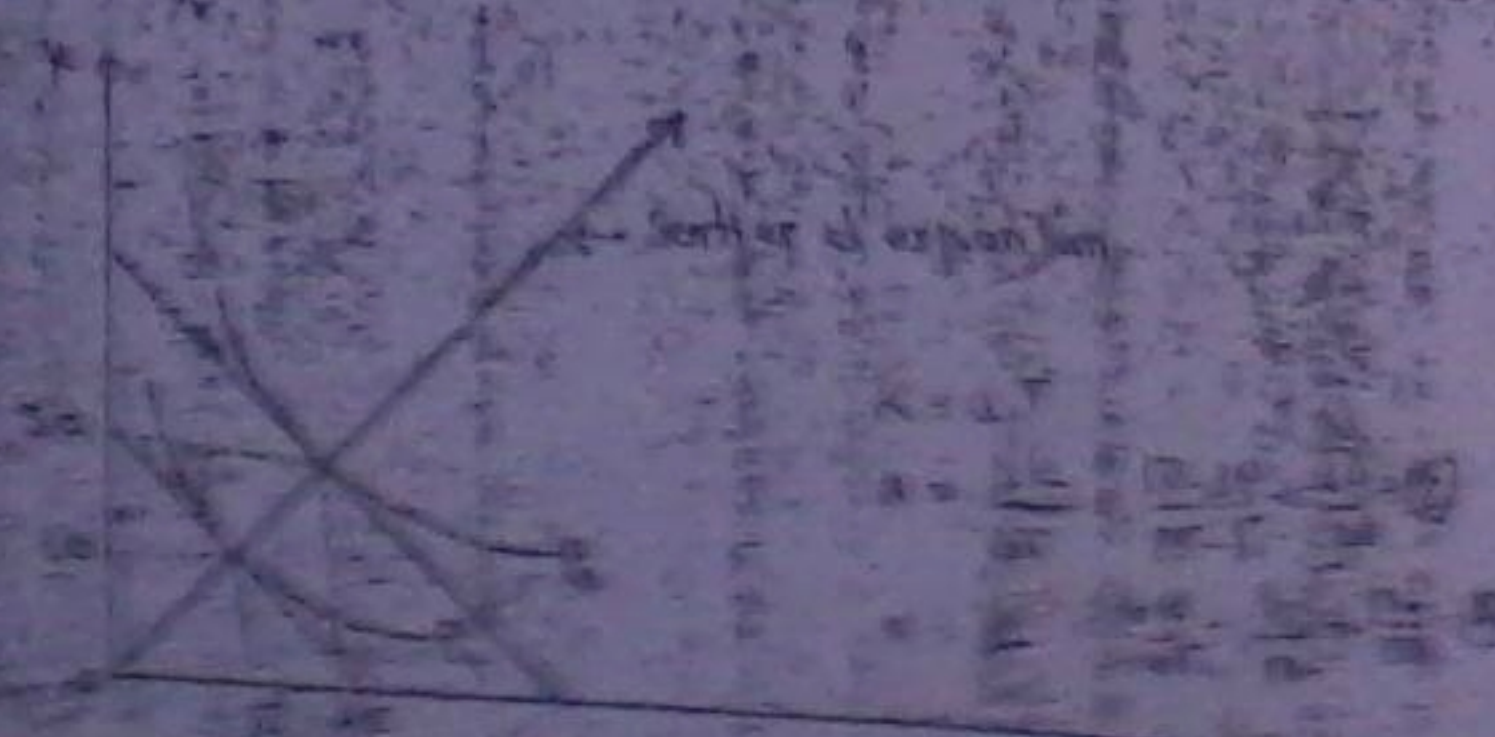
ou bien :  $CM_2 = \frac{CM_1}{5} = \frac{0,08}{5} = 0,016$

L'augmentation du PM du travail et du capital de 400%, ou la diminution du PM des facteurs par 5, sont traduites par la diminution du CM de 80% ou par la division du CM par 5.

$\Delta CM = -80\%$  soit  $CM_2 = CM_1 - CM_1 \cdot 80\% = CM_1(1 - 0,8) = 0,2 CM_1$   
 $CM_2 = \frac{CM_1}{5}$  (car  $\frac{1}{5} = 0,2$ )

4-1- Equation du "seuil" d'expansion

La fonction de  $P$  est homogène, par conséquent le "seuil" d'expansion est une droite. Son équation est  $K = 2T$



Une branche industrielle est composée de 1000 entreprises. Celles-ci produisent dans des conditions techniques identiques et opèrent dans un marché de concurrence parfaite. Les conditions de production de l'entreprise type sont résumées par la fonction de coût total :  $CT = f(x) = 10x^2 + 10x + 360$ ,  $x$  étant la quantité produite.

1. Etablir les équations de CVP, CVNP, CF, CTM, CVM, CFM, et Cm.
2. Déterminer la fonction d'offre de l'entreprise type, son seuil de fermeture et son seuil de rentabilité.
3. Déterminer la fonction d'offre au marché.
4. Si le prix du marché est de 200 dh l'unité, calculer l'élasticité de l'offre globale et calculer le profit de l'entreprise type.

1)  $CT = f(x) = 10x^2 + 10x + 360$

$CV = 10x^2 + 10x$   
 $CF = 360$   
 $CVP = 10x$   
 $CVNP = 10x^2$

$CTM = \frac{CT}{x} = 10x + 10 + \frac{360}{x}$   
 $CVM = \frac{CV}{x} = 10x + 10$   
 $CFM = \frac{360}{x}$   
 $Cm = 20x + 10 = CT'$

2) Fonction de l'offre de l'E<sup>e</sup> type :

L'offre est obtenue à partir des conditions de maximisation du profit  $\Pi_T = RT - CT$

$\Pi_T$  est maximal si  $\Pi_T' = 0$  et  $\Pi_T'' < 0$   
 condition de 1<sup>er</sup> ordre :  
 $\Pi_T' = 0 \Leftrightarrow \Pi_T = 0 \Leftrightarrow R_m - C_m = 0 \Leftrightarrow R_m = C_m$   
 ainsi  $R_m = P$  donc

$P = C_m \Leftrightarrow P = 20x + 10 \Leftrightarrow 20x = P - 10$   
 $x = \frac{P - 10}{20}$

donc  $x = 0,05P - 0,5$

condition de 2<sup>nd</sup> ordre :  $\Pi_T'' < 0$   
 $\Pi_T'' = R_m' - C_m' = 0 - 20 = -20 < 0$   
 donc la condition de 2<sup>nd</sup> ordre est vérifiée.  
 La fonction d'offre de l'entreprise type est :  
 $x = 0,05P - 0,5$



Or, le CVM étant linéaire ( $10n + 10$ ), nous définirons l'offre de l'E<sup>x</sup> à partir du min du CTH (seuil de rentabilité).

Au seuil de rentabilité, le CTH est minimum  
 $CM = 10n + 10 + \frac{360}{n}$  est minimum si  $CH' = 0$

$$CH' = 10 - \frac{360}{n^2} = 0 \Rightarrow 10n^2 = 360 \Rightarrow n^2 = 36 \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

WB nous peut déterminer le seuil de rentabilité par l'égalisation entre  $C_m$  et  $C_M$ .

$$C_m = CH \Leftrightarrow 20n + 10 = 10n + 10 + \frac{360}{n}$$

$$\Leftrightarrow 10n - \frac{360}{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10n^2 - n - 360 = 0$$

avec  $\Delta$  on va trouver  $\boxed{n \leq 6}$

Pour le seuil de fermeture :

min du CVM  $\Rightarrow CVM' = 0 \Rightarrow 10 = 0$  (donc il n'y a pas de seuil de fermeture)

$$CVM = C_m \Leftrightarrow 10n + 10 = 20n + 10 \Rightarrow 10n = 0 \Rightarrow n = 0$$

Pour une quantité offerte  $n = 6$ , le CM est

$$P \cdot CM = 10 \times 6 + 10 + \frac{360}{6} = 130$$

Ainsi, sera défini la  $P^0$  de l'offre de l'E<sup>x</sup> :

$$\text{offre} \begin{cases} n = f(P) = 0,05P - 0,5 & \text{si } P \geq 130 \\ n = 0 & \text{si } P < 130 \end{cases}$$

3) Fonction de l'offre au Marché :

offre au marché = offre globale =  $\sum$  des offres individuelles

$$f(P) = \sum_{i=1}^{1000} n_i = 1000 (0,05P - 0,5) = 50P - 500 \text{ si } P \geq 130$$

$$f(P) = 0 \text{ si } P < 130.$$